Estudio de la conjetura de Collatz

Versión 2.4

Autor: Jose A. Zamora González
Reservados todos los derechos de autor

Email: ensnnet@gmail.com

Indice

1. Conjetura

Definición de la conjetura de Collatz extraída de la página web http://gaussianos.com/la-conjetura-de-collatz:

Para cualquier número natural *n* realicemos los siguientes cálculos:

- Si *n* es par dividámoslo por 2
- Si *n* es impar multipliquémoslo por 3 y sumémosle 1 al resultado

Repitiendo el proceso con los números obtenidos **la secuencia siempre acabará en 1.**

De la definición, podemos observar que todo número par se divide por 2 sucesivamente hasta llegar a un número impar. En consecuencia, podemos considerar que el cumplimiento de la conjetura es equivalente al cumplimiento cuando en las secuencias se consideran sólo a los números impares de las mismas.

2. Patrones numéricos

En el apéndice 1 se razona que para cualquier valor impar n_i, su siguiente valor impar n_{i+1} asociado en la secuencia de Collatz se obtiene de las siguientes expresiones:

- Si $n_i = 1 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6*k$
- Si $n_i = 3 + 4*k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6*k$
- Si $n_i = 5 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 2*k$

Siendo k = 0,1,2,3,…

3. Expresión de n_i en función de n_{i+1}

Todos los números impares que cumplan la conjetura de Collatz se pueden representar en un árbol de números donde el primer nodo es el número 1.

Las expresiones del apartado anterior permiten calcular n_{i+1} en función de n_i, obteniéndose así las secuencias que terminan en el número 1. En consecuencia, las expresiones inversas, de n_i en función de n_{i+1}, definen una forma constructiva para obtener este árbol empezando por el número 1.

Para que la conjetura sea cierta, este árbol deberá contener a todos los números impares.

En el apéndice 2 se obtienen que las expresiones de n_i en función de n_{i+1} son:

a) Para todo valor de n_{i+1}: $n_i = 4^* n_{i+1} + 1$

b) Para $n_{i+1} \equiv 1 \pmod 3$: $n_i = \frac{4 * n_{i+1} - 1}{3}$

c) Para $n_{i+1} \equiv 2 \pmod 3$: $n_i = \frac{2 * n_{i+1} - 1}{3}$

La expresión a) se aplica a todos los valores de n_{i+1} y por lo tanto siempre existirá, mientras que las expresiones b) y c) sólo se aplican cuando el módulo del número n_{i+1} respecto de 3 sea 1 ó 2 respectivamente.

En consecuencia, los números n_{i+1} que son múltiplos de 3, sólo tienen como siguiente elemento del árbol aquel número que se obtiene al aplicar la expresión a), mientras que los números no múltiplos de 3 tendrán dos siguientes elementos en el árbol: el que resulte de la expresión a) y el que resulte de la expresión b) o de la expresión c) según su módulo respecto de 3 sea 1 ó 2 respectivamente.

4. Construcción del árbol de números

Es fácil comprobar que el único número que puede ser padre de este árbol es en número 1 dado que, para que un número n_{i+1} sea padre del grafo, deberá cumplir que $n_i = n_{i+1}$ y al aplicar a las tres expresiones anteriores tendremos:

$$\begin{cases} n_{i+1} = 4 * n_{i+1} + 1 & \rightarrow n_{i+1} = \dfrac{-1}{3} \\ n_{i+1} = \dfrac{4 * n_{i+1} - 1}{3} & \rightarrow n_{i+1} = 1 \\ n_{i+1} = \dfrac{2 * n_{i+1} - 1}{3} & \rightarrow n_{i+1} = -1 \end{cases}$$

Donde se obtiene que el único número natural que puede ser padre de si mismo es el número 1.

El procedimiento de construcción del árbol es el siguiente:

1. Se comienza con el número 1, por ser el único número posible como padre del árbol.

2. Se calcula el siguiente nodo que siempre existe y que se obtiene al aplicar la expresión a) anterior.

3. Se calcula el siguiente nodo opcional según sean el módulo respecto de 3:
   - Si el módulo es 0 (será múltiplo de 3) no existe nodo opcional.
   - Si el módulo es 1, el nodo opcional se obtiene al aplicar la expresión b).
   - Si el módulo es 2, el nodo opcional se obtiene al aplicar la expresión c).

   3.1. Por ejemplo, para el caso del número 1, el siguiente nodo será el número 1 y como su módulo respecto de 3 es 1, le seguirá además el nodo opcional que resulte de la expresión b) y que es el número 5. El número 1 no habrá que representarlo por ser él mismo y por tanto.

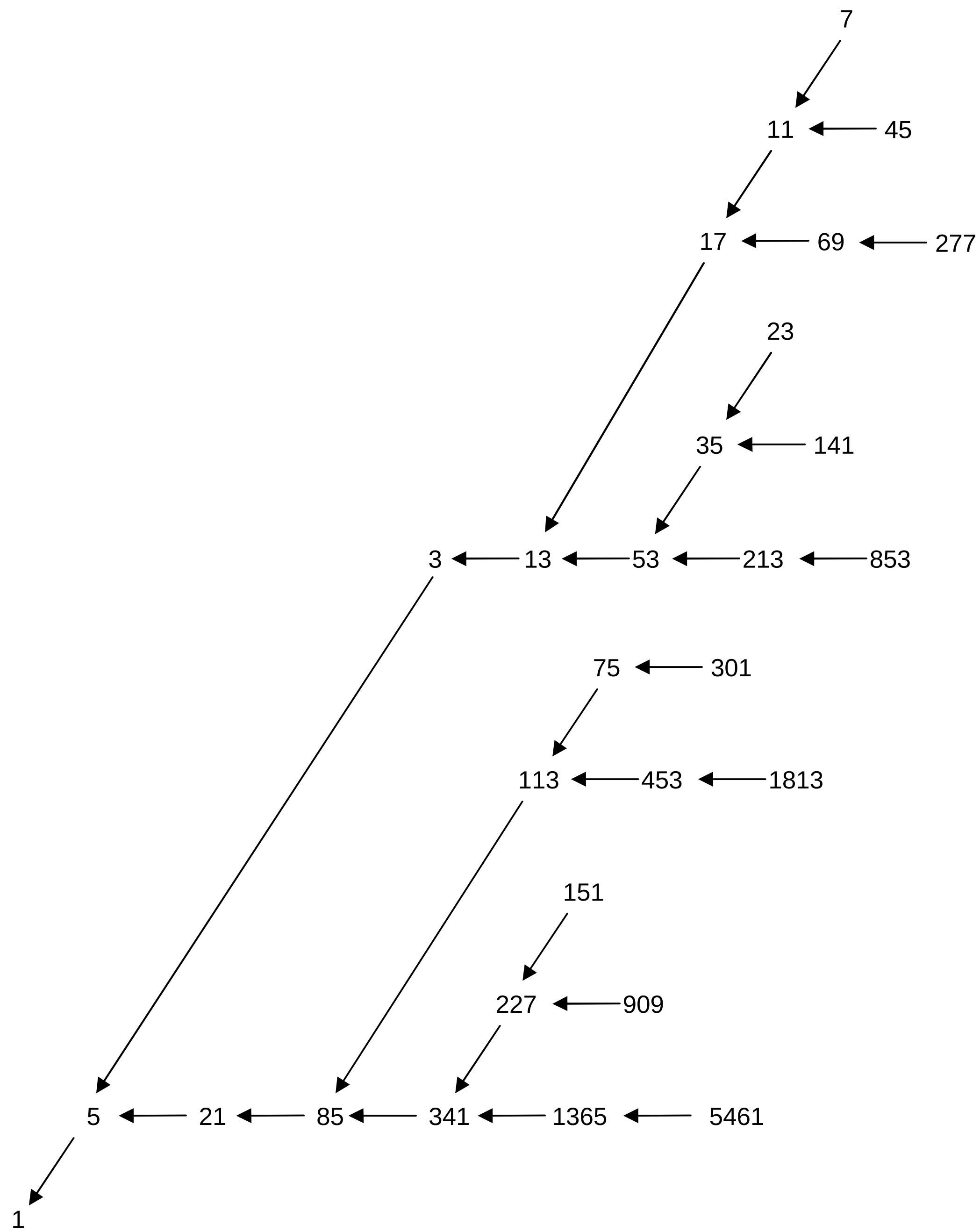
3.2. Y para el número 5, el siguiente nodo será el número 21 y como su módulo respecto de 3 es 2, le seguirá además el nodo opcional que resulte de la expresión c) y que es el número 3.

4. Se repite el proceso con todos los nuevos números que se van generado.

El árbol así generado es único y está formado por los infinitos números impares que cumplen la conjetura de Collatz, pero el procedimiento no garantiza que contenga a todos los números impares por lo tanto, con lo expuesto, **no queda demostrada si se cumple o no la conjetura**.

5. Ejemplo de los primeros niveles del árbol

Los primeros niveles del árbol construido con este procedimiento serían los siguientes:



NOTA: Se puede construir un árbol con todos los números que cumplen la conjetura de Collatz aplicando la definición de la conjetura. El árbol así construido comenzaría en el nodo 1 que tendría infinitos nodos hijo, cada uno de los cuales a su vez tendría infinitos nodos hijo y así sucesivamente. El árbol aquí presentado tiene la ventaja de que un nodo tiene un solo hijo si el nodo es un múltiplo de 3 o 2 hijos en caso contrario.

5.1. Método para la obtención de las secuencias

Dado un valor impar n cualquiera, para poder obtener del árbol anterior las secuencias reales de los números impares hasta el número 1, en la generación del árbol se debe seguir el siguiente criterio:

- Representar con una arista en horizontal los valores de la expresión a)
- Representar con una arista en diagonal los valores de las expresiones b) y c), tal como se muestra en el ejemplo. La única excepción de la unión 1←5 que le correspondería una arista horizontal pero se representa con una arista diagonal.

Para obtener la secuencia real de impares, comenzando en el número n dado, se recorre el árbol hasta alcanzar el número 1 y se descartan todos los números horizontales que aparezcan.

Por ejemplo, para el número 1813, la secuencia de número impares serían los números siguientes que quedan una vez tachados los valores horizontales, es decir:

1813, ~~453, 113~~, 85, ~~21, 5~~, 1 → 1813, 85, 1

6. Apéndice 1

En este apéndice se van a calcular las expresiones que permiten a partir de un valor impar n_i obtener el siguiente valor impar n_{i+1} de su secuencia de Collatz.

En la siguiente tabla se muestran en la columna n_i los primeros números impares y en la columna n_{i+1} el siguiente impar en su secuencia de Collatz:

Tabla 1

n_i	n_{i+1}
1	1
3	5
5	1
7	11
9	7
11	17
13	5
15	23
17	13
19	29
21	1
23	35
25	19
…	

Donde para k = 0,1,2,3, … tenemos que:

$1 + 8*k \rightarrow 3*(1+8*k) + 1$

$= 4 + 24*k$

$= 4*(1 + 6*k) \rightarrow 1 + 6*k$

$3 + 4*k \rightarrow 3*(3+4*k) + 1$

$= 10 + 12*k$

$= 2*(5 + 6*k) \rightarrow 5 + 6*k$

Por tanto, siendo k = 0,1,2,3,…, los dos patrones identificados, son los siguientes:

- En color verde: Si $n_i = 1 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6*k$
- En color amarillo: Si $n_i = 3 + 4*k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6*k$

Quedando sin identificar un patrón para los números $n_i = 5 + 8*k$, para k = 0,1,2,3,…

6.1. Proposición p1

Si para un valor impar n el siguiente impar en su secuencia de Collatz es el valor m, entonces para el número impar 4*n+1 el siguiente impar en su secuencia de Collatz es también el valor m.

Demostración

Si n es impar, 4*n+1 también será impar y, aplicando a este último las expresiones de Collatz tendremos que:

$3*(4*n+1)+1 = 12*n+4 = 4*(3*n+1) \rightarrow 3*n+1$

Por lo tanto, si n es impar entonces n y 4*n+1 tendrán el mismo número impar como siguiente valor en sus secuencias de Collatz. □

6.2. Sustitución por números equivalentes

Los números de la tabla 1 que no presentan un patrón son los números $n_i = 5 + 8*k$, siendo k = 0,1,2,3,…, esta expresión se puede descomponer como:

$n_i = 5 + 8*k$

$= 1+4 + 2*4*k$

$= 4*(2*k+1) + 1$

$= 4*n_j + 1$, siendo ahora $n_j = 1,3,5,7$

Por la proposición p1, si $n_i = 4*n_j+1$, entonces n_i y n_j tienen el mismo valor m como siguiente impar en sus respectivas secuencias de Collatz. En consecuencia, podríamos considerar equivalente sustituir en la tabla 1 el valor de la columna n_{i+1} por el valor n_j que cumple la expresión $n_i = 4*n_j + 1$ y se obtendrá la siguiente tabla, donde los cambios se han marcado en azul:

Tabla 2

n_i	n_{i+1}
1	1
3	5
5	1
7	11
9	7
11	17
13	3
15	23
17	13
19	29
21	5
23	35
25	19
27	41
29	7
…	

Quedando así para k = 0,1,2,3,…, los tres patrones siguientes, que contienen a todos los valores n_i de la tabla 2:

- Si $n_i = 1 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6*k$
- Si $n_i = 3 + 4*k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6*k$
- Si $n_i = 5 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 2*k$

Al aplicar esta sustitución se está alterando la secuencia real insertando números adicionales, por lo que no se modifica el comportamiento de la misma. A cambio, se obtiene un patrón para obtener un valor de n_{i+1} para los números del tipo $n_i = 5 + 8*k$.

7. Apéndice 2

En este apéndice se van a calcular las expresiones que, en una secuencia de números impares de Collatz, permiten expresar el valor del impar n_i en función del valor impar n_{i+1}.

Para ello, partimos de los 3 patrones obtenidos en el apéndice 1:

- Si $n_i = 1 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6*k$
- Si $n_i = 3 + 4*k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6*k$
- Si $n_i = 5 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 2*k$

Para $n_i = 1 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6*k$

Despejando k en la segunda ecuación:

$$k = \frac{n_{i+1} - 1}{6}$$

Y sustituyendo k en la primera ecuación tendremos que:

$$n_i = 1 + 8 * \frac{n_{i+1} - 1}{6} = \frac{4 * n_{i+1} - 1}{3}$$

Para $n_i = 3 + 4*k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6*k$

Despejando k en la segunda ecuación:

$$k = \frac{n_{i+1} - 5}{6}$$

Y sustituyendo k en la primera ecuación tendremos que:

$$n_i = 3 + 4 * \frac{n_{i+1} - 5}{6} = \frac{2 * n_{i+1} - 1}{3}$$

Para $n_i = 5 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 2*k$

Despejando k en la segunda ecuación:

$$k = \frac{n_{i+1} - 1}{2}$$

Y sustituyendo k en la primera ecuación tendremos que:

$$n_i = 5 + 8 * \frac{n_{i+1} - 1}{2} = 4 * n_{i+1} + 1$$

Quedando que la 3 expresiones de n_i en función de n_{i+1} serán:

a) Para cualquier valor de n_{i+1}: $n_i = 4 * n_{i+1} + 1$

b) Para $n_{i+1} \equiv 1 \pmod 3$: $n_i = \frac{4 * n_{i+1} - 1}{3}$

c) Para $n_{i+1} \equiv 2 \pmod 3$: $n_i = \frac{2 * n_{i+1} - 1}{3}$