Estudio de la conjetura de Collatz

Versión 3.0

Autor: Jose A. Zamora González

Email: ensnnet@gmail.com

Indice

1. Introducción

Definición de la conjetura de Collatz extraída de la página web http://gaussianos.com/la-conjetura-de-collatz:

Para cualquier número natural *n* realicemos los siguientes cálculos:

- Si *n* es par dividámoslo por 2
- Si *n* es impar multipliquémoslo por 3 y sumémosle 1 al resultado

Repitiendo el proceso con los números obtenidos **la secuencia siempre acabará en 1.**

Un planteamiento equivalente sería que si existe una secuencia que lleva a cualquier número a un número menor aplicando los cálculos anteriores, entonces se cumple la conjetura de Collatz.

En este estudio se trata de buscar grupos o patrones de números que cumplan este planteamiento equivalente.

El siguiente número de un número par es su mitad y por tanto menor por lo tanto los números pares cumplen este planteamiento equivalente.

Podemos observar que dentro de una secuencia, todo número par se divide por 2 sucesivamente hasta llegar a un número impar. En consecuencia, podemos considerar que el cumplimiento de la conjetura es equivalente al cumplimiento cuando en las secuencias se consideran sólo a los números impares.

2. Patrones numéricos

En el apéndice 1 se razona que para cualquier valor impar n_i, su siguiente valor impar n_{i+1} asociado en la secuencia de Collatz se obtiene de las siguientes expresiones:

- Si n_i = 1 + 8*k → n_{i+1} = 1 + 6*k, las llamaremos secuencias de tipo 1
- Si n_i = 3 + 4*k → n_{i+1} = 5 + 6*k, las llamaremos secuencias de tipo 3
- Si n_i = 5 + 8*k → n_{i+1} = 1 + 2*k, las llamaremos secuencias de tipo 5

Siendo k = 0,1,2,3,…

Para los números de los tipos 1 y 5 anteriores, el siguiente número impar de su secuencia es menor, por lo que cumplirán también el planteamiento equivalente.

Análisis de patrones para el tipo 3

Despejando n_{i+1} en función de n_i de las 3 ecuaciones anteriores y tendremos que:

Para tipo 1: $n_{i+1} = \frac{3}{4}n_i + \frac{1}{4}$

Para tipo 3: $n_{i+1} = \frac{3}{2}n_i + \frac{1}{2}$

Para tipo 5: $n_{i+1} = \frac{1}{4}n_i - \frac{1}{4}$

Si representamos la secuencia de números impares por el código del tipo de número al que pertenecen (tipos 1, 3 y 5 anteriores), obtendremos patrones de secuencias. Podemos definir la longitud de la secuencia como la cantidad de elementos del patrón.

Así, para cualquier número n_i que siga la secuencia 3-5 tendremos que:

$$n_{i+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}n_i + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}n_i - \frac{1}{8} \rightarrow n_{i+1} < n_i$$

Es decir, la secuencia 3-5, de longitud 2, cumple el planteamiento equivalente y los números que siguen esta secuencia son 3+16*k, con k=0,1,2, …; y que suponen $\frac{1}{4}$ del total de los números de tipo 3.

Siguiendo la búsqueda de patrones, también cumplen el planteamiento equivalente las secuencias de longitud 3 siguientes:

- 3-1-1, que corresponde con los números 43+64*k, suponen $\frac{1}{16}$ del total de los números de tipo 3
- 3-1-5, que corresponde con los números 11+64*k, suponen $\frac{1}{16}$ del total de los números de tipo 3
- 3-3-5, que corresponde con los números 23+32*k, suponen $\frac{1}{8}$ del total de los números de tipo 3

Siendo k=0,1,2, …

Realizando un análisis numérico hasta alcanzar patrones de longitud 20, se obtienen 2.297.989 patrones que suponen un 96,32% del total de los números de tipo 3.

NOTA: Se puede observar que si la secuencia es 3-a-b-c-…, la frecuencia se obtiene de la expresión:

4*f(a)*f(b)*f(c)*…, siendo:

f(3) = 2

f(1) = f(5) = 4

Por ejemplo:

Secuencia 3-1-1 → 4*4*4 → frecuencia 64k

Secuencia 3-3-5 → 4*2*4 → frecuencia 32k

Secuencia 3-3-3-3-5-1 → 4*2*2*2*4*4 → frecuencia 512k

3. Apéndice 1

En este apéndice se van a calcular las expresiones que permiten a partir de un valor impar n_i obtener el siguiente valor impar n_{i+1} de su secuencia de Collatz.

En la siguiente tabla se muestran en la columna n_i los primeros números impares y en la columna n_{i+1} el siguiente impar en su secuencia de Collatz:

Tabla 1

n_i	n_{i+1}
1	1
3	5
5	1
7	11
9	7
11	17
13	5
15	23
17	13
19	29
21	1
23	35
25	19
…	

Donde para k = 0,1,2,3, … tenemos que:

1 + 8*k → 3*(1+8*k) + 1

= 4 + 24*k

= 4*(1 + 6*k) → 1 + 6*k

3 + 4*k → 3*(3+4*k) + 1

= 10 + 12*k

= 2*(5 + 6*k) → 5 + 6*k

Por tanto, siendo k = 0,1,2,3,…, los dos patrones identificados, son los siguientes:

- En color verde: Si $n_i = 1 + 8*k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6*k$
- En color amarillo: Si $n_i = 3 + 4*k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6*k$

Quedando sin identificar un patrón para los números $n_i = 5 + 8*k$, para k = 0,1,2,3,…

3.1. Proposición p1

Si para un valor impar n el siguiente impar en su secuencia de Collatz es el valor m, entonces para el número impar 4*n+1 el siguiente impar en su secuencia de Collatz es también el valor m.

Demostración

Si n es impar, 4*n+1 también será impar y, aplicando a este último las expresiones de Collatz tendremos que:

3*(4*n+1)+1 = 12*n+4 = 4*(3*n+1) → 3*n+1

Por lo tanto, si n es impar entonces n y 4*n+1 tendrán el mismo número impar como siguiente valor en sus secuencias de Collatz. □

3.2. Sustitución por números equivalentes

Los números de la tabla 1 que no presentan un patrón son los números $n_i = 5 + 8*k$, siendo k = 0,1,2,3,…, esta expresión se puede descomponer como:

$n_i = 5 + 8*k$

= 1+4 + 2*4*k

= 4*(2*k+1) + 1

= 4*n_j + 1, siendo ahora n_j = 1,3,5,7

Por la proposición p1, si n_i = 4*n_j+1, entonces n_i y n_j tienen el mismo valor m como siguiente impar en sus respectivas secuencias de Collatz. En consecuencia, podríamos considerar equivalente sustituir en la tabla 1 el valor de la columna n_{i+1} por el valor n_j que cumple la expresión n_i = 4*n_j + 1 y se obtendrá la siguiente tabla, donde los cambios se han marcado en azul:

Tabla 2

n_i	n_{i+1}
1	1
3	5
5	1
7	11
9	7
11	17
13	3
15	23
17	13
19	29
21	5
23	35
25	19
27	41
29	7
…	

Quedando así para k = 0,1,2,3,…, los tres patrones siguientes, que contienen a todos los valores n_i de la tabla 2:

- Si n_i = 1 + 8*k → n_{i+1} = 1 + 6*k
- Si n_i = 3 + 4*k → n_{i+1} = 5 + 6*k
- Si n_i = 5 + 8*k → n_{i+1} = 1 + 2*k

Al aplicar esta sustitución se está alterando la secuencia real insertando números adicionales, por lo que no se modifica el comportamiento de la misma. A cambio, se obtiene un patrón para obtener un valor de n_{i+1} para los números del tipo $n_i = 5 + 8*k$.